

MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 16.11.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Laske integraali $\int_0^1 \int_0^1 y^3 e^{xy^2} dy dx$.

2. Laske integraali $\iiint_S f(x, y, z) dv$, missä $f(x, y, z) = x - z$ ja S on pintojen $z = y^2$, $z = 1$, $z = x$ ja $x = 0$ rajaama joukko.

3. Tarkastellaan funktiota $y(x)$ koskevaa differentiaaliyhtälöä

$$y' - 3x^2 e^{-y} = 0.$$

a) Mitä seuraavista tyypeistä yhtälö on: lineaarinen, ensimmäistä kertalukua, vakiokertoiminen?

b) Hae yhtälölle sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 2$.

4. Muunna funktioita $y(t)$, $u(t)$ koskeva differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3u = \sin t \\ u' - 4y = e^t \end{cases}$$

differentiaaliyhtälösystemiksi (normaaliryhmäksi)

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t).$$

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, kun $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Laske eksponenttimatriisi e^{At} .

b) Ratkaise systeemi alkuarvolla $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$.

c) Onko systeemi tasapainopisteessään $\mathbf{0}$ stabiili?