

MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 10.08.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Laske suorien $y = x$, $y = 2$ ja käyrän $xy = 1$ rajaaman alueen pinta-ala.

2. Kappale $S \subset \mathbb{R}^3$ muodostuu joukosta, jota rajoittavat pinnat $z = x^2$, $z = 8 - x^2$, $y = -1$ ja $y = -3$. Laske S :n tilavuus.

3. Tarkastellaan funktiota $y(x)$ koskevaa differentiaaliyhtälöä

$$y' - y^2 e^{-x} = 0.$$

a) Mitä seuraavista tyypeistä yhtälö on: lineaarinen, ensimmäistä kertalukua, vakiokertoiminen?

b) Hae yhtälölle sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 2$.

4. Muunna funktioita $y(t)$, $u(t)$ koskeva differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3u = \sin t \\ u' - 4y = e^t \end{cases}$$

differentiaaliyhtälösystemiksi (normaaliryhmäksi)

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t).$$

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, kun $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Laske eksponenttimatriisi e^{At} .

b) Ratkaise systeemi alkuarvolla $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$.

c) Onko systeemi tasapainopisteessään $\mathbf{0}$ stabiili?