MAT-13440 Laaja matematiikka 4

Esimerkkitentti/2010

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!
Perustele kaikki väitteesi!

1. Osoita oikeaksi tai vääräksi:

   a) Jos jonot $\{\mathbf{x}_k\}$ ja $\{\mathbf{y}_k\}$ ovat $\mathbb{R}^n$:n suppenevia jonoja ja
   $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, $\lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$, niin $\|\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ kaikilla k.

   b) Äärellisen joukon $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ komplementti on avoin.

2. Tutki, onko funktiolla $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$,

   $$f(x,y,z) = \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

   raja-arvo, kun $(x,y,z) \to (0,0,0)$? Myönteisessä tapauksessa laske kyseinen raja-arvo.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva. Millä ehdoilla (jos millään) on olemassa piste $\mathbf{x}_0$, jossa suunnatulle derivaatalle pätee

   a) $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}_0) > 0 \ \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$,

   b) $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}_0) \ge 0 \ \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$?

4. Laske yhdistetyn kuvauksen $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ derivaatta (Jacobin matriisi) pisteessä (1,0), kun

   $$\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x^2 - y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(u,v,w) = \begin{bmatrix} u^{10}v + w^2 \\ u - v^{10} \end{bmatrix}.$$

5. Hae funktion $f(x,y) = 2x^2 - y^3 - 2xy$ kriittiset pisteet ja tutki niiden laatu (eli että ovatko lokaaleja maksimi- vai minimikohtia vai satulapisteitä).