

MAT-13440 Laaja matematiikka 4

Tentti 29.03.2008

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Osoita oikeaksi tai vääräksi:

a) $\text{int}(A \cup B) = \text{int } A \cup \text{int } B$

b) $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl } A \cup \text{cl } B$ (cl on closure eli sulkeuma) *cl A = int A \cup bd A*

c) $\text{bd}(A \cup B) = \text{bd } A \cup \text{bd } B$.

2. Todista (jatkuvuuden ja kompaktisuuden määritelmiin nojautuen), että jos $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva ja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ on (jono)kompakti, niin myös kuvajoukko $f(S) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in S : y = f(x)\}$ on (jono)kompakti.

3. a) Tarkastellaan funktiota $f: (-1,1) \times [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 \sqrt{y}}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Onko funktio f jatkuva origossa?

b) Millä kaikilla parametrin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, arvoilla funktiolla $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^n y}{x^2 + y^4}$$

on raja-arvo, kun $(x,y) \rightarrow (0,0)$?

4. Laske yhdistetyn kuvauksen $g \circ f$ derivaatta (Jacobin matriisi) pisteessä $(1,-1)$, kun

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{x^2 + 3y^2} \\ \sqrt{y+2} \end{bmatrix}, \quad g(u,v,w) = \begin{bmatrix} uv + 2w^2 \\ u - v^2 \end{bmatrix}.$$

5. Hae funktion $f(x,y) = 24y^2 + \frac{4}{3}y^3 - y^4 - 32x^2$ kriittiset pisteet ja tutki niiden laatu (eli ovatko lokaaleja minimi- tai maksimikohtia vai satulapisteitä).

Mieti vielä pisteiden laatu!