

## MAT-13440 Laaja matematiikka 4

Tentti 22.03.2006

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Olkoot  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  ja  $A \subset B$ . Osoita oikeaksi tai vääräksi:

- a)  $\text{int } A \subset \text{int } B$
- b)  $\text{ext } A \supset \text{ext } B$
- c)  $\text{bd } A \subset \text{bd } B$
- d)  $\text{cl } A \subset \text{cl } B$ .

2. Tarkastellaan funktiota  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \sin x}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Onko funktio  $f$  jatkuva?

b) Muodosta funktion  $f$  suunnattu derivaatta suuntaan  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$

pisteessä  $(0, 0)$  eli  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(0, 0)$ , jos se on olemassa.

3. Laske yhdistetyn kuvauksen  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  derivaatta ( Jacobin matriisi )  
pisteessä  $(1, -1)$ , kun

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{x^2 + 3y^2} \\ \sqrt{y+2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u^2 + v^2 + 2w^2 \\ u^2 - v^2 \end{bmatrix}.$$

4. Laske integraali  $\iint_{\Omega} (x + 2y^2) da$ , kun  $\Omega$  on suorien  $y = -x$ ,  $y = x - 2$  ja  $y = 2$  rajaama kolmio.

5. Laske sen  $\mathbb{R}^3$ :n kappaleen tilavuus, jota rajoittavat parabolinen sylinteri  $x = y^2$  sekä tasot  $z = 0$  ja  $x + z = 1$ .