

## MAT-13440 Laaja matematiikka 4

Tentti 21.09.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!  
Perustele kaikki väitteesi!

- Osoita oikeaksi tai vääräksi:  
Jos  $\{\mathbf{x}_k\}$  on  $\mathbb{R}^n$ :n sellainen jono, jolle  $\|\mathbf{x}_k\| \rightarrow 1$ , kun  $k \rightarrow \infty$ , niin jono  $\{\mathbf{x}_k\}$ 
  - on suppeneva
  - on rajoitettu
  - sisältää suppenevan osajonon.

2. Tutki, onko funktiolla  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

raja-arvo, kun  $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$ ? Myönteisessä tapauksessa laske kyseinen raja-arvo.

- Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti differentioituva. Millä ehdoilla (jos millään) on olemassa piste  $\mathbf{x}_0$ , jossa suunnatulle derivaatalle pätee
  - $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}_0) < 0 \quad \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ ,
  - $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}_0) \leq 0 \quad \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ ?

4. Laske yhdistetyn kuvauksen  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  derivaatta (Jacobin matriisi) pisteessä  $(1, 0)$ , kun

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x^2 - y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u^{10}v + w^2 \\ u - v^{10} \end{bmatrix}.$$

- Hae funktion  $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - 2x$  suurin ja pienin arvo neliössä  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ .