

## MAT-13440 Laaja matematiikka 4

Tentti 20.3.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!  
Perustele kaikki väitteesi!

- Osoita oikeaksi tai vääräksi:
  - Jos jono  $\{\mathbf{x}_k\}$  on suppeneva, niin se on rajoitettu.
  - Jos jono  $\{\mathbf{x}_k\}$  on rajoitettu, niin se on suppeneva.
  - Jos funktio  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja jono  $\{\mathbf{x}_k\}$  on sellainen, että  $\{f(\mathbf{x}_k)\}$  on suppeneva, niin myös  $\{\mathbf{x}_k\}$  on suppeneva.
  - Jos  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  suljettu, niin funktiolla  $f$  on joukossa  $S$  minimikohta.
  - Jos joukko  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on avoin, niin se ei ole suljettu.
  - Jos joukon  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  reuna on  $A$ , niin  $A$  on suljettu.

- Mihin suuntaan pisteestä  $(3, -1, 1)$  funktio  $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3$  kasvaa nopeimmin?
  - Muodosta pinnalle  $xy^2 + yz^3 = 2$  tangenttitaso pisteeseen  $(3, -1, 1)$ .

- Tutki, onko funktiolla  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

raja-arvo, kun  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ? Myönteisessä tapauksessa laske kyseinen raja-arvo.

- Laske yhdistetyn kuvauksen  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  derivaatta (Jacobin matriisi) pisteessä  $(1, -1)$ , kun

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x + y \\ x^2 + y^3 \\ y^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u^{10}v - w^2 \\ u + v^{10} \end{bmatrix}.$$

- Hae funktion  $f(x, y) = 2x^2 - y^3 - 2xy$  kriittiset pisteet ja tutki niiden laatu (eli että ovatko lokaaleja maksimi- vai minimikohtia vai satulapisteitä).