

MAT-13440 Laaja matematiikka 4

Tentti 14.05.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!
Perustele kaikki väitteesi!

1. Osoita oikeaksi tai vääräksi:

a) Jos jonot $\{x_k\}$ ja $\{y_k\}$ ovat \mathbb{R}^n :n suppenevia jonoja ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y, \quad \text{niin } \|x_k + y_k\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ kaikilla } k.$$

b) Äärellisen joukon $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ komplementti on avoin.

2. Tutki, onko funktiolla $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

raja-arvo, kun $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$? Myönteisessä tapauksessa laske kyseinen raja-arvo.

3. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva. Millä ehtoilla (jos millään) on olemassa piste x_0 , jossa suunnatulle derivaatalle pätee

a) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(x_0) > 0 \quad \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$,

b) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(x_0) \geq 0 \quad \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$?

4. Laske yhdistetyn kuvauksen $g \circ f$ derivaatta (Jacobin matriisi) pisteessä $(1,0)$, kun

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x^2 - y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u^{10}v + w^2 \\ u - v^{10} \end{bmatrix}.$$

5. Hae funktion $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - 2xy$ suurin ja pienin arvo neliössä $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$.