

1. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -2x - 4y + 7z = 1, \\ -3x - 8y + 10z = 1, \\ x + 2y - 4z = 1. \end{cases}$$

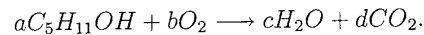
- (a) Kirjoita yhtälöryhmää vastaava lisätty matriisi  $[A | b]$ .  
(b) Muunna  $[A | b]$  pelkistettyyn porrasmuotoon. Merkitse käyttämäsi alkeisrivioperaatiot näkyviin.  
(c) Ratkaise  $x, y$  ja  $z$  käyttämällä Gauss-Jordanin eliminaatiota.

2. Tarkastellaan vektoreita

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ovatko vektorit  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$  lineaarisesti riippumattomat? Perustele.  
(b) Muodosta kanta aliavaruudelle  $\text{row}([\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_4])$ .  
(c) Mikä on aliavaruuden  $\text{col}([\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_4])$  dimensio? Voit käyttää tarvittaessa kurssilla todistettuja lauseita apuna.

3. Tarkastellaan kemiallista reaktioyhtälöä



- (a) Muodosta yhtälöryhmä reaktioyhtälön molekyylien kertoimille  $a, b, c, d$ .  
(b) Ratkaise (a)-kohdan yhtälöryhmä ja määrää pienimmät kokonaislukukertoimet reaktioyhtälölle.

4. Neliömatriisi  $Q$  on ortogonaalinen, jos  $Q^T Q = I = Q Q^T$ .

- (a) Näytä, että jokainen ortogonaalinen matriisi on kääntyvä.  
(b) Osoita, että  $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  on ortogonaalinen. Määrää  $R^{-1}$ .  
(c) Todista, että ortogonaaliselle matriisille pätee  $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ . Merkintä  $\|\vec{x}\|$  tarkoittaa vektorin  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  pituutta.

5. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Etsi  $A$ :n ominaisarvot.  
(b) Etsi  $A$ :n ominaisvektorit.  
(c) Kirjoita  $A$  muotoon  $A = PDP^{-1}$ , missä  $D$  on diagonaalinen.