



Tentissä ei saa käyttää laskinta eikä kirjallista materiaalia.

1. Oletetaan, että vektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  ovat lineaarisesti riippumattomia  $\mathbb{R}^n$ :n vektoreita. Osoita, että  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ja  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  ovat lineaarisesti riippumattomia.

2. Olkoon  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  ja  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Tiedetään, että  $\text{rank}(B) = 2$  ja että

$$\text{rref}([A \mid B]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita **tarkasti**, että  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ .

3. Määrittele seuraavat käsitteet

- aliavaruuden kanta,
- ortonormaali joukko,
- matriisin karakteristinen polynomi.

4. Olkoon  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , ja  $U = \text{span}(\mathbf{u})$ . Määrittelemme Householderin matriisin

$$H = I - \frac{2}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

- Osoita, että  $H^{-1} = H$ .
- Osoita, että  $\mathbf{u}$  on  $H$ :n ominaisvektori. Mikä on sitä vastaava ominaisarvo?
- Olkoon  $\mathbf{y} \in U^\perp$ . Osoita, että  $\mathbf{y}$  on  $H$ :n ominaisvektori. Mikä on sitä vastaava ominaisarvo?