MAT-13421 Laaja Matematiikka 2i
Tentti 8.2.2010

Tentissä ei saa käyttää laskinta eikä kirjallista materiaalia.

1. Tutki muodostavatko annetut vektorijoukot avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan:

a. $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$,

b. $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

Perustele vastauksesi.

2. Oletetaan, että vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ muodostavat aliavaruuden $V = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ kannan ja että $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\|$. Merkitsemme $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.
Osoita, että

a. vektorit $\mathbf{u}_1$ ja $\mathbf{u}_2$ ovat ortogonaalisia,

b. joukko $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ on V:n kanta.

3. Osoita, että neliömatriisi A on ei-singulaarinen jos ja vain jos sillä on nolla ominaisarvona.

4. Olkoon $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, ja $U = \mathrm{span}(\mathbf{u})$. Määrittelemme Householderin matriisin

$$H = I - \tfrac{2}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{u}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

a. Osoita, että H on symmetrinen ja $H^2 = I$.

b. Onko H singulaarinen?

c. Laske $H\mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x} \in U$ ja $H\mathbf{y}$ kaikilla $\mathbf{y} \in U^{\perp}$.