MAT-10444 Insinöörimatematiikka D4 u

Tentti 13.05.2013 / Kimmo Vattulainen

- **Vastaa tehtävät 1-2 yhdelle konseptille ja 3-4 toiselle konseptille.**
- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Suoran kaksi pistettä ovat $(-2, 2, 6)$ ja $(1, 2, 3)$. Missä pisteissä tämä suora leikkaa pinnan $z = x^2 + y^2$?

2. **a)** Yhdistetyistä funktioista $F \circ G$ ja $G \circ F$ vain toinen voidaan muodostaa. Muodosta se ja laske sen derivaattamatriisi, kun

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2y^2 \\ e^x \\ y + xy \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad G(x, y, z) = \begin{bmatrix} y^2 \\ z \\ x \end{bmatrix}$$

b) Mikä on **a)**-kohdan funktion linearisointi pisteessä $x = 0,\ y = 1$?

3. Määritä funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 2xy - y^2$$

lokaalit ääriarvokohdat, lokaalit ääriarvot ja niiden laatu (minimi, maksimi)

a) joukossa $\mathbb{R}^2$

b) suoralla $y = 2 - x$

4. Kappale sijaitsee $xyz-$koordinaatiston osassa, jossa $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Kappaletta rajoittavat pinta $z = 4 - x^2 - y^2$ ja koordinaattitasot. Kappale jaetaan kahteen osaan $xy-$tason suuntaisella tasolla $z = 2$. Laske sen osan tilavuus, joka jää tason $z = 2$ ja $xy-$tason väliin.

MAT-10444 Insinöörimatematiikka D 4u
Kaavakokoelma

1.
$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

2.
$$(G \circ F)'(\mathbf{x}) = G'(F(\mathbf{x}))F'(\mathbf{x})$$

3.
$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$$

4.
$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

5.
$$T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

6.
$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H\, f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

7.
$$P_m(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b)$$

8.
$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

9.
$$\iint_R f(x, y)\ dx\ dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\ dr\ d\theta$$

10.
$$\iiint_T f(x, y, z)\ dV$$
$$= \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi$$

11.
$$m = \iiint_T \rho\ dV, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\rho\ dV, \quad I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\rho\ dV$$

12.
$$\iint_A f(x, y)\ dxdy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|\ du\ dv$$

13.
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$$

14.
$$\int f'(g(t))g'(t)\ dt = f(g(t)) + C$$
$$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ dx + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + C$$