Insinöörimatematikka X 1u
Tentti 10.05.2012
Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Kaavamoniste kääntöpuolella.

Huom. Missään tehtävässä pelkkä vastaus ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää myös päättely, jolla vastaukseen päädyit.

1. (a) Tutki totuustaululla, onko $((p \to q) \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow q$ tautologia.
   (b) Todista suoralla todistuksella: Kahden parittoman luvun summa on parillinen.

2. Olkoot funktiot f ja g määritelty kaavoilla $f(x) = x^2 - 1$ ja $g(x) = -\sqrt{x}$.
   (a) Esitä yhdistettyjen funktioiden $f \circ g$ ja $g \circ f$ lausekkeet ja laajimmat määrittelyjoukot.
   Vihje: Selvitä aluksi funktioiden f ja g laajimmat määrittelyjoukot.
   (b) Etsi funktion $h(x) = \dfrac{3x+5}{2x+3}$ käänteisfunktion lauseke.

3. (a) Selvitä luku a, jolla funktio f on jatkuva määrittelyjoukossaan, kun sen lauseke on
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & x < 2 \\ 3x + a, & x \geq 2 \end{cases}$$
   (b) Derivoi $g(x) = \ln(3x) + \tan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x}{x-1}$.

4. (a) Ilmoita luku $\dfrac{4+3i}{2-i}$ muodossa $a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ luku $(2+4i)x^2 - 5x + 2 - i$ on puhtaasti imaginäärinen?

Insinöörimatematiikka X 1u
Kaavamoniste

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\log_a g(x)$	$\frac{g'(x)}{g(x)\ln a}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

$$D_y\left(f^{-1}(y)\right) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{y=f(x)} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$