

MAT-02500 Todennäköisyyslaskenta

Tentti 18.10.2016 / Kimmo Vattulainen

- Funktiolaskin sallittu
 - Palauta kaavakokoelma
-

1. Vastaa tehtävät 2 ja 3 yhdelle konseptille ja tehtävät 4 ja 5 toiselle. Varaa molempien konseptien alkuun tilaa n. 10 riviä ja kokoa näille riveille eri kohtien vastaukset. Tehtävien ratkaisut/perustelut kirjoitetaan normaalisti näiden rivien jälkeen. Vastaamalla tämän ohjeen mukaan saa 1 pisteen. Tentin maksimipistemäärä on 25 pistettä.

2. Komponentin elinikä tunneissa on satunnaismuuttuja X , jonka tiheysfunktio

$$f(x) = \frac{100}{x^2}, \quad x \in \Omega = [100, \infty)$$

- Jos valitaan kaksi toisistaan riippumatonta komponenttia A ja B , niin millä todennäköisyydellä ainakin toinen niistä kestää vähintään 150 tuntia?
- Mikä on satunnaismuuttujan odotusarvo $E(X)$?
- Jos valitaan 5 toisistaan riippumatonta komponenttia, niin millä todennäköisyydellä niistä täsmälleen kaksi kestää korkeintaan 150 tuntia?

3. a) Kappaleen massa X noudattaa normaalijakaumaa. 50% kappaleista on massaltaan alle 10 kg ja 90% alle 14 kg. Mikä osuus kappaleista on massaltaan alle 8 kg?
b) Jos tällaisia kappaleita valitaan kolme, niin millä todennäköisyydellä niiden kokonaismassa on yli 40 kg? Kappaleiden massat ovat toisistaan riippumattomia.

4. a) Jos saman otosavaruuden tapahtumien A ja B todennäköisyydet ovat $P(A) = 0.7$ ja $P(B) = 0.5$, niin mitä arvoja ehdollinen todennäköisyys $P(A | B)$ voi saada?
b) Jos riippumattomat kokonaisluvut a ja b valitaan napanheitolla, niin millä todennäköisyydellä $a + b \geq ab$.
c) Jos kulhossa on 2 valkoista ja 4 mustaa palloa ja näistä otetaan satunnaisesti palauttamatta 3 palloa, niin millä todennäköisyydellä ne ovat kaikki mustia.
d) Jos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, niin mitä on $E(X^2 - X)$.
e) Jos $X \sim \text{Poi}(1)$, niin mitä on $P(X \geq \mu)$.
f) Satunnaisvektorin (X, Y) otosavaruus $\Omega = \{(1, 3), (4, 6)\}$ ja tiheysfunktio $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

Laske $\text{Cov}(X, Y)$

5. Suunnistusreitien pituus kartalla on 4 km. Maaston esteistä, reittivalinnoista ym. johdun suunnistajan kulkema todellinen matka on satunnaismuuttuja X (km) ja hänen keskinopeutensa on satunnaismuuttuja Y (km/h). Näiden riippumattomien satunnaismuuttujien tiheysfunktiot ja otosavaruudet ovat

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - 4), \quad x \in \Omega_x = [4, 6], \quad g(y) = \frac{1}{6}y, \quad y \in \Omega_y = [2, 4]$$

- Kuinka suuri osa suunnistajista pääsee perille alle kahdessa tunnissa?
- Kuinka kauan keskimäärin suunnistajalta menee reitillä?