MAT-02450 Fourier'n menetelmät

Tentti 5.3.2014 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Kirjoita konsepteihin FM, nimesi ja numerosi
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle peräkkäin neljä neliötä a' 2×2.

1. Funktio f on määritelty yhtälöillä

$$\begin{cases} f(t) = t, & \text{kun} \quad -\pi < t < \pi, \\ f(2\pi + t) = f(t). \end{cases}$$

Laske määritelmän mukaisesti sille trigonometrinen Fourier-sarja.

2. Funktion g Fourier-sarja kompleksisessa muodossa on

$$\hat{g}(t) = \frac{5(1-j)}{2} e^{-j3t} - 2 + \frac{5(1+j)}{2} e^{j3t}.$$

a) Esitä sen ns. kolmas muoto.
b) Laske funktion g keskimääräinen teho.

3. Erään otoksen DFT-jono on

$$\left\{4, 0, \frac{1}{4}j, 0, 0, 0, -\frac{1}{4}j, 0\right\}.$$

Laske käänteismuunnoksen eli IDFT-jonon 4 ensimmäistä termiä. Sievennä tuloksesi.

4. Osoita, että

$$\mathscr{F}\Big\{1\Big\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega).$$

Etsi sitä ja Fourier-muunnosten ominaisuuksia käyttäen

$$\mathscr{F}\Big\{\cos(3t)\Big\}(\omega).$$

Tehtävän pisteet eivät tule ulkoa muistamisesta. Perustele joka vaiheessa, mikä on se ominaisuus kaavakokoelmassa, jota käytät. Jos kaavakokoelmassa ei sitä näy, niin perustele kyseinen ominaisuus kaavakokoelman tiedoilla.

Kaavakokoelma

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$, $\quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$,

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$.

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt, & n &= 1, 2, 3, \dots \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt, & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T}\int_d^{d+T} f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \qquad g_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\mathscr{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}\,du, \qquad \mathscr{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

$\mathscr{F}\Big\{f(at)\Big\}(\omega) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0,$ $\qquad \mathscr{F}\Big\{f'(t)\Big\}(\omega) = j\omega F(\omega)$

$\mathscr{F}\Big\{f(t-a)\Big\}(\omega) = e^{-ja\omega}F(\omega),$ $\qquad \mathscr{F}\left\{e^{jbt}f(t)\right\}(\omega) = F(\omega - b)$

$\mathscr{F}\Big\{(f * g)(t)\Big\}(\omega) = F(\omega)G(\omega),$ $\qquad \mathscr{F}\Big\{f(t)g(t)\Big\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$

$\mathscr{F}\Big\{\mathscr{F}\{f\}(t)\Big\}(\omega) = \mathscr{F}\Big\{F(t)\Big\}(\omega) = 2\pi f(-\omega).$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\hat{F}(\omega) = h\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)e^{-j\omega kh}, \qquad \left\{\hat{F}_n\right\}_{n=0}^{N-1} = \left\{hG_n\right\}_{n=0}^{N-1}.$$