MAT-01360 Matematiikka 3 / Mattila
Tentti 29.2.2016

Vastaa kaikkien kysymysten kaikkiin kohtiin. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä. Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperin saa pitää. Ratkaisut löytyvät kokeen jälkeen kurssin Moodle-alueelta. Muistathan antaa opintojaksosta Kaiku-palautteen saadaksesi opintosuorituksen.

1. (a) Määritä osittaisintegroimalla $\int 4x^2 \sin 2x\, dx$. (3p)

   (b) Määritä integraali $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\, dx$. (3p)

2. (a) Määritä epäoleellisen integraalin $\int_0^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ arvo. (3p)

   (b) Tarkastellaan lukujonoa $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $a_k = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}$. Suppeneeko lukujono a_k? Entä suppeneeko tätä lukujonoa vastaava sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$? Vihje: käytä vertailuperiaatetta. (3p)

3. (a) Voidaanko sarjat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{a_k}$ päätellä suppeneviksi tai hajaantuviksi kun tiedetään, että $a_k > 0$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$ ja että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ suppenee? Perustele vastauksesi. (3p)

   (b) Johda potenssisarjaesitys funktiolle $\cos^2 x$ käyttäen apuna kosinin potenssisarjaa $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ sekä trigonometristä identiteettiä $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$. Millä muuttujan x arvoilla saamasi potenssisarja esittää funktiota $\cos^2 x$? (3p)

4. (a) Ratkaise alkuarvotehtävä

   $$(x^2+1)y' = xy, \quad y(2) = 5. \quad \text{(3p)}$$

   (b) Määritä yritemenetelmällä differentiaaliyhtälön

   $$y'' - 2y' + y = -4e^x$$

   yleinen ratkaisu. (3p)