MAT-01360 Matematiikka 3 / Mattila
Tentti 11.4.2016

Vastaa kaikkien kysymysten kaikkiin kohtiin. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä. Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperin saa pitää. Ratkaisut löytyvät kokeen jälkeen kurssin Moodle-alueelta. Muistathan antaa opintojaksosta Kaiku-palautteen saadaksesi opintosuorituksen.

1. (a) Määritä osittaisintegroimalla $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$. (3p)
   (Ohje: ratkaise kysytty integraali saamastasi yhtälöstä)

   (b) Määritä $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$ tekemällä sopiva sijoitus. (3p)

2. (a) Määritä epäoleellisen integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+9}$ arvo. (3p)
   $\left(\text{Vihje}: D\arctan(ax) = \frac{a}{(ax)^2+1}\right)$

   (b) Tarkastellaan lukujonoa $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $a_k = \frac{k^2+k+1}{2k^2-k}$. Suppeneeko lukujono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$? Entä suppeneeko tätä lukujonoa vastaava sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$? (3p)

3. (a) Sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ tiedetään suppenevan itseisesti. Päättele tämän tiedon avulla seuraavien sarjojen suppeneminen tai hajaantuminen: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$. Perustele vastauksesi. (3p)

   (b) Määritä potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{\sqrt{k}}$ suppenemisväli. (3p)

4. (a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' = \frac{x^2}{y^3} + \frac{3}{y^3}, \quad y(0) = \sqrt{2} \quad (3\text{p})$$

   (b) Homogeenisella Eulerin differentiaaliyhtälöllä on yleensä muotoa $y = x^r$ olevia (lineaarisesti riippumattomia) ratkaisuja, missä $r \in \mathbb{R}$. Määritä tätä tietoa apuna käyttäen riittävä määrä ratkaisuja kolmannen kertaluvun Eulerin yhtälölle $x^3y''' - x^2y'' = 0$ ja muodosta niiden avulla yhtälön yleinen ratkaisu. (3p)