MAT-01360 Matematiikka 3, kevät 2014,
Välikoe 1, ma 3.2.2014 (vko 6)

Tentaattori: Simo Ali-Löytty

Ohjeet: Ei laskimia, eikä muistiinpanoja.
Kaavakokoelma on paperin kääntöpuolella.
Jokainen tehtävä tehdään omalle sivulle / omille sivuille.
Kirjoita vastauksien perustelut ja välivaiheet näkyviin!

1. Laske määrätty integraali tai osoita, että integraali ei ole olemassa

(a)
$$\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$$

(b)
$$\int_1^3 \frac{3x-1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}\,x$$

2. (a) Määritellään lukujono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s.e. $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$, kun $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että lukujono suppenee ja laske lukujonon raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n$.
(b) Osoita, että funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ovat vakioita ja $a < b$, on integroituva välillä $[a, b]$. Lisäksi laske määritelmän (kts. alla) avulla määrätty integraali
$$I = \int_a^b c\,\mathrm{d}\,x.$$

Taustaa: (Riemann-)integraali määritellään seuraavasti. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Jos raja-arvo

$$I = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

on olemassa, niin silloin f on integroituva välillä $[a, b]$ ja luku I on funktion f määrätty integraali yli välin $[a, b]$. Tällöin merkitään

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Yllä olevassa $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a, b]$ mielivaltainen jako, missä $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, jaon normi

$$|P| = \max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

ja x_i^* on välin $[x_{i-1}, x_i]$ mielivaltainen piste.

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Matematiikan laitos

MAT-01360 Matematiikka 3, kaavakokoelma 2013-2014

1. Integrointikaavoja

$f(x)$	$\int f(x)\ \mathrm{d}x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x = \frac{1}{\tan x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{ar\,sinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar\,cosh} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar\,tanh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C$

2. $\displaystyle\int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x$

3. $\displaystyle s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{d}x, \quad A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{d}x, \quad V = \pi\int_a^b f(x)^2\ \mathrm{d}x$

4. $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

5. Maclaurinin sarjoja:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},\ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \qquad (x \in \mathbb{C})$$

6. $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = 0$: $\quad a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

- yksinkertainen reaalijuuri λ: ratkaisu $e^{\lambda x}$
- yksinkertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut
  $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ ja $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
- k-kertainen reaalijuuri λ: ratkaisut
  $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$
- k-kertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut
  $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
  $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$