

81125 Tietorakenteet ja algoritmit, tentti 11.5. 2001, Ilkka Kokkarinen

Tentin maksimipistemäärä on 30 (+3 bonus) pistettä. Kirjoita vastauksesi erilliselle vastauskonseptille, ja käytä sellaista käsiälää, että tarkastaja saa vastauksista selvää. Laita vastauskonseptiin nimesi, opiskelijanumerosi ja sähköpostiosoitteesi.

1. Kukin kohta arvostellaan asteikolla 0–2 pistettä. Perustele vastauksesi.

- (a) Tiedetään, että jokainen alkioiden järjestysvertailuun perustuva algoritmi käyttää pahimmassa tapauksessa $\Omega(n \log n)$ aikaa sen tutkimiseen, sisältääkö n -alkiainen taulukko jotakin alkioita kaksi kertaa. Miksi tästä voidaan päätellä, että jokainen alkioiden järjestysvertailuun perustuva algoritmi käyttää pahimmassa tapauksessa $\Omega(n \log n)$ aikaa taulukon järjestämiseen?
- (b) Mainitse yksi etu ja yksi haitta, joka ketjutetulla hajautustaululla on verrattuna avoimen osoituksen hajautustauluun.
- (c) Taulukosta $A[1, \dots, n]$ pitää etsiä alusta lukien ensimmäinen alkio, joka esiintyy josakin kohdassa taulukkoa $B[1, \dots, n]$. Kerro sanallisesti, miten tämä tehdään pahimman tapauksen suoritusajassa $O(n \log n)$.
- (d) Piirrä jokin puna-musta puurakenne, jossa on 11 solmua ja jonka punaisten solmujen määrä on mahdollisimman pieni. (Puna-mustassa puussa juuri on musta, kahta punaista solmua ei ole päällekkäin ja juuresta alas kuljettaessa tulee reitistä riippumatta vastaan sama määrä mustia solmuja.) Osoita solmujen värit laittamalla solmuun kirjain 'P' tai 'M' sen mukaan, minkä värinen solmu on.
- (e) Kahdesta tavallisen binäärihakupuun solmusta p ja q voidaan itse avainten arvoja katsomatta selvittää, kumman avain on pienempi etsimällä solmujen ensimmäinen yhteinen esi-isä r ja katsomalla, kumpi solmuista p ja q on solmu r tai sen vasemmassa alipuussa. Kerro sanallisesti, miten tämä voidaan toteuttaa $O(1)$ -lisämuistilla ja $O(h)$ -ajassa, missä h on puun korkeus.
- (f) Kun Dijkstran algoritmi ajetaan kaaripainoilla varustettuun suunnattuun verkkoon, solmun u kenttä $d(u)$ kertoo lyhimmän lähtösolmusta solmuun u vievän polun pituuden. Jos u ja v ovat solmuja ja niiden välisen kaaren paino on $w(u, v)$, millaisen epäyhtälön suureet $d(u)$ ja $d(v)$ toteuttavat?
- (g) Miten virtausverkosta nähdään, että sille muodostettu virtaus on suurin mahdollinen, eikä suurempaa virtausta ole mahdollista muodostaa?
- (h) Kun yhteysvapaalle kieliopille kirjoitetaan rekursiivisen laskeutumisen jäsentäjä, niin millä tavalla kieliopin korvaussääntö $\langle \mathbf{A} \rangle ::= \alpha$, missä α on jokin väli- ja loppusymboleiden jono, ja välisymbolia $\langle \mathbf{A} \rangle$ vastaava funktio ovat yhdenmuotoisia?
- (i) Tehtävänä on luetella taulukon $A[1, \dots, n]$ suurimmat k alkioita suuruusjärjestyksessä. Kun oletetaan, että taulukon i :nneksi suurimman alkion etsiminen voidaan tehdä ajassa $\Theta(n)$, niin millaisella algoritmilla tehtävä voidaan ratkaista pahimman tapauksen suoritusajassa $O(n + k \log k)$?
- (j) Mainitse kaksi nopeutustekniikkaa, joilla backtracking-algoritmin toimintaa voi tehtäväkohtaisesti nopeuttaa.

(k) Perustele, että jokainen alkioden suuruusjärjestysvertailuun perustuva algoritmi, joka etsii taulukon $A[1, \dots, n]$ suurimman alkion, joutuu vastauksen antamiseksi suorittamaan ainakin $n - 1$ suuruusjärjestysvertailua.

(l) Kruskalin algoritmi voidaan toteuttaa vaihtoehtoisesti siten, että valittujen kaarten joukko on aluksi tyhjä, minkä jälkeen verkon kaaret käydään läpi mielivaltaisessa järjestyksessä. Kukin kaari lisätään mukaan valittujen kaarten joukkoon, ja jos kaaren lisääminen synnyttää valittujen kaarten joukkoon silmukan, poistetaan silmukan raskain kaari valittujen kaarten joukosta. Kun verkko on esitetty kytkentälistaesityksenä ja sen solmut on numeroitu $1, \dots, V$, niin mikä on tämän algoritmin asymptoottinen pahimman tapauksen ajoaika suureiden V ja E suhteen?

2. Kaksiulotteisen $n \times n$ -neliömatriisin A alkiot ovat mielivaltaisia reaalityyppisiä lukuja niin, ettei mikään luku esiinny matriisissa kahta kertaa. Tehtävänä on muodostaa lukuketju $B[1, \dots, n]$ siten, että kukin luku $B[i]$ on otettu matriisin A riviltä i jostakin sarakkeesta j , mutta jos $B[i]$ on otettu rivin i sarakkeesta j , niin $B[i + 1]$ otetaan rivin $i + 1$ sarakkeesta $j - 1$, j tai $j + 1$. Kirjoita tehokas algoritmi $\text{BestSeries}(A, n)$ etsimään kyseisen ehdon toteuttava lukuketju $B[1, \dots, n]$ siten, että ketjun lukujen summa on mahdollisimman suuri, ja palauttamaan vastauksena kyseinen summa. Selitä ohjelmasi toiminta niin, että siitä saa tolkkua. (6p.)

3. Bonustehtävä 1

Kirjoita lyhyt mielipiteesi kurssin toteutuksesta ja kerro, mitkä asiat ovat hiertäneet tai ilahduttaneet. Jokainen mielipide, olipa se positiivinen tai negatiivinen, joka herättää tarkastajassa ajatuksen "joo, taitaa se asia hyvinkin olla noin jonkun opiskelijan näkökulmasta", on yhden tenttipisteen arvoinen.

4. Bonustehtävä 2

Kirjassa *A Compendium of Trick Plays* käydään seuraava kuvitteellinen keskustelu Gomestarin ja tämän oppilaan Joe Patzerin välillä:

Sensei: "There are quite a few cases of joseki which involve danger when a ladder [eräs Go-tilanteen ominaisuus, joka vaikuttaa siihen, onnistuuko tietty siirtosarja tavoitteensa vai epäonnistuuko se surkeasti] is unfavorable, so there is a fully justified fear that by indiscriminately memorizing joseki one can end up tricking oneself."

Joe Patzer: "Actually, speaking of joseki books, if it is not pointed out that one cannot play in a certain way because of a ladder, or that one must be careful in certain situations, that is being really unkind."

Sensei: "It is exactly that unkind side of those Go books that is the source of delight of trick play artists."

Kurssin oppikirjan alussa algoritmit ja josekit rinnastettiin. Jos äskeinen keskustelu käytäisiin josekien sijaan algoritmeista, niin mikä olisi tässä analogiassa keskustelun keskeinen valituksen aihe algoritmikirjoista? (2p.)